

Weil 予想とエタールコホモロジー

梅崎直也@unaoya

2019 年 11 月 25 日

Weil 予想とは有限体 \mathbb{F}_q 上定義された代数多様体 X の合同ゼータ関数 $Z(X/\mathbb{F}_q, T)$ が持ついくつかの性質についての予想です。合同ゼータ関数は、方程式の解の個数についての母関数として

$$Z(X/\mathbb{F}_q, T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})| \frac{T^n}{n}\right)$$

により定義されるもので、予想は

1. 有理性
2. 関数等式
3. Betti 数との関係
4. Riemann 予想の類似

からなります。

この予想は、Weil 自身による曲線の場合の解決、Dwork による一般次元の場合における有理性の証明ののち、Grothendieck らによって整備されたエタールコホモロジーの理論により関数等式や Betti 数との関係が証明され、最終的には Deligne によって Riemann 予想の類似が証明されたことで完全に解決しました。

Grothendieck や Deligne による証明においてはエタールコホモロジーや l 進層の理論が大きな役割を果たします。講演では、これらの理論が Weil 予想の解決にどのように用いられたか、可能な限り証明の内容に踏み込んでお話ししたいと思います。