回転数とボルスク・ウラムの定理

ふらすか *

2020 年 3 月 1 日

概要

今回の発表では代数的トポロジーへの入門を目指す. かといってホモロジー群などを扱うわけではなくどちらかというとトポロジーへの入門に近い. トポロジーはよく「柔らかい幾何学」などと言われることがある. 私たちは中学生時代に三角形の”相似”や”合同”を習ったはずである.(私は不勉強だったのであまりできなかったが…)

相似や合同はある種の分類であった. トポロジーではある程度の図形の変形を認めて,”同相”や”ホモトピー同値”と言った関係で分類することがある. これらは相似や合同といった関係を緩めたものとして捉えることができ, トポロジーが「柔らかい幾何学」と呼ばれる所以である.

発表では以下のものを取り上げる.

(1) オイラー数

(2) ホモトピーと回転数

(3) ブラウアーの不動点定理

(4) ボルスク・ウラムの定理

回転数という言葉はあまり馴染みがないかもしれないが,S^1 から S^1 への連続写像全体の集合をホモトピーによって類別した集合は, 実は回転数という概念で分類できる.

次に不動点定理とボルスク・ウラムの定理（二次元版）を示す. 不動点定理については以下のようである.

definition 0.1. X を集合とし, $f : X \to X$ を連続写像とする. f の不動点とは $f(x) = x$ となる $x \in X$ のことである.

theorem 0.1. （ブラウアーの不動点定理）

任意の連続写像 $f : D^2 \to D^2$ は不動点を持つ.

ボルスク・ウラムの定理に関しては前述の回転数が証明に用いられる.

theorem 0.2. （ボルスク・ウラムの定理）

連続写像 $f : S^2 \to \mathbb{R}$ に対して $f(-a) = f(a)$ となる点 $a \in S^2$ が存在する.

実はこの定理は地球の表面を完全な球面として考えたとき, 各時刻において気温と気圧が共に等しい対蹠点が常に存在することを意味している.

一般次元の場合に関しては発表時間（と準備時間）が許せば紹介するつもりである.

この発表を通じて少しでも（代数的）トポロジーに興味を抱いていただければ幸いである.

参考文献

[1] 枡田幹也,『代数的トポロジー』, 朝倉書店

[2] 中岡稔,『不動点定理とその周辺』, 岩波書店

[3] 一樂重雄,『位相幾何学』, 朝倉書店

* Twitter:@flasca495, mail:flasca495@gmail.com