

第 4 回関東すうがく徒のつどい

各点 Kan 拡張概論

@alg_d

圏の圏 \mathbf{Cat} は 2-category と呼ばれる構造を持っている。そこで 2-category を \mathbf{Cat} の一般化とみなしたときに、圏論を 2-category へ一般化できるかという問題を考えることができる。2-category の例としては例えば V -豊穡圏がなす $V\text{-Cat}$ があるから、このような一般化ができると、圏論での議論をそのまま V -豊穡圏に適用できたりして嬉しい。

ところで全ての概念は Kan 拡張だったから、まずは Kan 拡張が 2-category へ一般化できるかというのが問題となるが、これは Kan 拡張と 2-category の定義を知っていれば容易に可能である。

しかし圏論をやっていると、重要なのは Kan 拡張よりもむしろ各点 Kan 拡張だと分かってくる。すると各点 Kan 拡張が 2-category へ一般化できるかを考えたくなる。実際、[3] では $V\text{-Cat}$ における各点 Kan 拡張が定義されている。

実はコンマ圏は 2-category へ一般化できる (コンマ対象という) ことが知られている。故にコンマ対象を使って各点 Kan 拡張を定義することができる。しかしこの定義は上記の [3] での定義とは一致しないことが知られている。つまりコンマ対象を使った各点 Kan 拡張は応用上問題が発生するのである。

本講演では、この問題を解決するための手法として「yoneda structure」「proarrow equipment」「double category」とこれらの間の関係について概説する。

前提知識は、(通常の) 圏論はもちろんのこと、豊穡圏論の基本、Grothendieck fibration の定義、bicategory の知識 (特に bilimit/bicolimit) などである。なお bicategory の入門については [1]、豊穡圏論については [2] も参照のこと。

参考文献

[1] 第 11 回関西すうがく徒のつどい, 高次元圏入門, Youtube

[2] 第 12 回関西すうがく徒のつどい, #豊穡圏は射が取れないからクソ, Youtube

- [3] E. J. Dubuc, Kan Extensions in Enriched Category Theory, <https://www.springer.com/jp/book/9783540049340>
- [4] R. Street and R.F.C. Walters, Yoneda Structures on 2-categories, [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(78\)90160-6](https://doi.org/10.1016/0021-8693(78)90160-6)
- [5] Mark Weber, Yoneda structures from 2-toposes, <https://sites.google.com/site/markwebersmaths/home/yoneda-structures-from-2-toposes>
- [6] R. J. Wood, Abstract Proarrows I, http://www.numdam.org/item/?id=CTGDC_1982__23_3_279_0
- [7] R. J. Wood, Proarrows II, http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1985__26_2_135_0
- [8] R. Rosebrugh and R. J. Wood, Proarrows and Cofibrations, [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(88\)90128-4](https://doi.org/10.1016/0022-4049(88)90128-4)
- [9] M. A. Shulman, Framed Bicategories and Monoidal Fibrations, <https://arxiv.org/abs/0706.1286>
- [10] S. R. Koudenburg, On pointwise Kan extensions in double categories, <https://arxiv.org/abs/1402.0250>
- [11] Ivan Di Liberti and Fosco Loregian, on the unicity of Formal Category Theories, <https://arxiv.org/abs/1901.01594>