鳩の巣原理は “難しい”

「第四回関東すうがく徒のつどい」講演アブストラクト

December 19, 2019

日々の営みの中で，我々は定理を証明しただけでは満足せず,「もっとエレガントな証明はないだろうか？」と考えることがありますね．この「エレガント」を「短い」と捉えてみましょう．すると，様々な証明体系を学ぶ中で，次の問題が自然に浮かんできます．

「正しい定理が必ず短い証明を持つ」ような“良い”証明体系は存在するのか？

この問いについて考えてみましょう．まず“短い”というのを,「証明の長さが，結論の長さの（結論に依存しない一様な）多項式で抑えられる」と定めるのは妥当でしょう．次に，数学的言明を表現する“言語体系”として何を考えるかですが,「一階述語論理」をひとまず考えたくなります．すると，上の問題は（「証明の長さ」を適当に定義したもとで），Church の定理より，否定的に解決されます．

では，表現力を弱めた“言語体系”である「命題論理」においてこの問題を考えるとどうなるでしょうか？実はこれは,「NP=coNP か？」という問い（有名な未解決問題）を考えていることになり，大変難しいです．

この難問にアタックするためにも，まずは手持ちの具体的な証明体系（例えば，Hilbert 流証明体系，シーケント計算などなど）の各々について，それが“良い”ものかどうか考えてみたくなりますが，実はこのような部分問題たちですら，その多くは未解決です．

しかし，こと resolution system という証明体系に関しては，“良くはない”こと，より具体的には，例えば「鳩の巣原理」（を命題論理式の列で表現したもの）の証明の長さが，どうしても指数関数的に増大してしまうことが示されています．

本講演では，特に調べやすい tree-like resolution に的を絞り,「鳩の巣原理の証明の長さ」が指数関数的に増えてしまうことを示します．組み合わせ論的な議論で「証明の width」という量の評価に落とし込み，最後にこれを評価するにあたり,「ゲーム」を用いた意味論を導入するのが魅力です．