

# 平方剰余の相互法則

AKITO (@Akito\_ut)

私は、東京大学理学部数学科を卒業し、現在は YouTube で高校数学と大学数学の動画を主に配信しております。大学時代は整数論を専攻しておりました（とはいえ学部レベルなので専攻とも呼べないぐらいです）が、整数論に興味を持ったきっかけが、「平方剰余の相互法則」です。

素数  $p$  と  $p$  で割り切れない整数  $a$  に対し、 $x^2 \equiv a \pmod{p}$  となる整数  $x$  が存在するとき、 $a$  は  $p$  を法として平方剰余であるといい、奇素数  $p$  に対し、

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & (a \text{ は } p \text{ を法として平方剰余である}) \\ -1 & (a \text{ は } p \text{ を法として平方剰余でない}) \end{cases}$$

で定義される  $\left(\frac{a}{p}\right)$  をルジャンドル記号といいます。異なる奇素数  $p, q$  に対し、

$$\left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = -1^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$
 となることを平方剰余の相互法則といいます。

平方剰余の相互法則は、 $\pmod{p}$  と  $\pmod{q}$  という関係なさそうな 2 つを結んでいて、自分が初めて学んだときは感動した記憶があります。また、相互法則には色んな証明があり、整数論の勉強を進めていくと、色んな視点で眺めることができます。

講演では、

- ① 初等的な証明
- ② ガウス和を用いた証明
- ③ 2 次体での素数の分解を用いた考察

について話そうと思います。高校数学の知識を前提に主に①②の話をし、③は時間の都合上、ある程度代数学の基礎事項を前提とし、雰囲気だけでも伝えられるように時間の許す限り話そうと思います。自分が学んだときの感動と整数論の魅力が少しでも伝えられればと思います。