闇空間 $\mathbb{R}$ と Souslin 線

サクラ (@1997_takahashi)

2020 年 1 月 6 日

今回の講演では実数 $\mathbb{R}$ の全順序集合としての構造に着目し，次の観察から始める．

命題 0.1 全順序集合 X について，次は同値である．

(1) X は次の三条件を満たす：
 (a) 最大元および最小元を持たない．
 (b) 自己稠密かつ完備である．
 (c) 順序位相空間として**可分**である．
(2) X は $\langle\mathbb{R},\leq\rangle$ と順序集合として同型である．

これは実数 $\mathbb{R}$ の特徴を端的に表しているように思われそれ自体が面白い結果であるが，「これらの三条件を少しでも弱められないか??」という疑問が湧く．これに関連して 1920 年の Problèmes には，Mikhail Yakovlevich Souslin の遺稿として次の問題が記されている：Un ensemble ordonné (linéairement) sans sauts ni lacunes et tel que tout ensemble de ses intervalles (contenant plus qu'un élément) n'empiétant pas les uns sur les autres est au plus dénombrable, est-il nécessairement un continu linéaire (ordinaire)? これを定式化しなおしたものが次の問題である．

命題 0.2 全順序集合 X について，次は同値であるだろうか．

(1) X は次の三条件を満たす：
 (a) 最大元および最小元を持たない．
 (b) 自己稠密かつ完備である．
 (c) 順序位相空間として**可算鎖条件**を満たす．
(2) X は $\langle\mathbb{R},\leq\rangle$ と順序集合として同型である．

この命題が正しい，即ち可分性を可算鎖条件まで弱められるであろう，という仮説が Souslin の仮説であり，この仮説が正しくない場合に存在する反例を Souslin 線という．

今回の講演では詳細には触れないが，Souslin の仮説は 1971 年に Solovay により ZFC 上独立であることが証明されている．これは Souslin 線の存在を仮定しても (ZFC が無矛盾である限り) 矛盾は導かれないことを意味するので，本講演ではこの存在を仮定し[*1]，一見すると性質に大きな違いがあるように思われない $\mathbb{R}$ と Souslin 線との違いを考察する．特に，$\mathbb{R}$ には位相群の構造が入るが，Souslin 線に入る連続な二項算法は消約的になりえないことを紹介したい．

[*1] 仮定をせずとも議論をすることはできるが，流石に空虚な感が否めないであろう．